

# Application of the partial accelerations method in large-scale modeling of mechanical systems

Bogomolov V.<sup>1</sup>, Podrigalo M.<sup>1</sup>, Shein V.<sup>1</sup>, Baitsur M.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Kharkiv National Automobile and Highway University, Ukraine

**Annotation. Problem.** Modern trends in the design of mechanical systems require the application of efficient methods to reduce time and resource expenditures during the development and testing of new structures. Large-scale modeling serves as a critical tool for verifying theoretical principles, evaluating the safety, and assessing the functionality of mechanical systems at early design stages. However, the complexity of dynamic models that describe the behavior of mobile machines in a scaled format necessitates the development of approaches to simplify such models. One promising approach is the method of partial accelerations, which enables mathematical and computational optimization of modeling processes. **Purpose.** The purpose of this study is to improve large-scale modeling methods by employing the method of partial accelerations in the study of mobile machine dynamics. **Methodology.** The research is based on the principle of superposition in mechanics, which enables the replacement of classical dynamic equations with equations of partial accelerations in a homogeneous vector space. This approach significantly simplifies the mathematical representation of system dynamics. **Results.** It has been established that the acceleration scale for mechanical systems operating within Earth's gravitational field is always equal to unity, simplifying the process of determining the scaling factors for other physical quantities. The study proposes equations for partial accelerations that provide an accurate representation of the kinematics of both prototype and scaled models of mobile machines. Furthermore, the application of the multi-component complex motion model demonstrated its ability to evaluate dynamic deviations in mobile machines and account for the effects of active and reactive forces. **Originality.** The proposed method of partial accelerations introduces a novel approach to large-scale modeling of mechanical systems. By operating within a homogeneous vector space of accelerations, this method eliminates the need for inertial forces, reducing the complexity of mathematical models and enhancing the accuracy of predicting system dynamic behavior. **Practical meaning.** The method of partial accelerations can be applied in the following areas: designing mobile machines, including vehicles and planetary rovers; optimizing dynamic tests using accelerometers; modeling the energy efficiency of vehicles under steady and unsteady motion; enhancing scaled models for safety and maneuverability analyses.

**Key words:** large-scale modeling of mechanical systems, method of partial accelerations, mobile machines, principle of superposition in mechanics, dynamic testing, multi-component complex motion, scale of physical quantities, energy efficiency of vehicles

## Introduction

Large-scale modeling accelerates the development and production of new products. It also facilitates the verification of fundamental theoretical principles and ensures the safety of new designs at the early stages of their development. This approach has been widely employed in the design and manufacturing of marine and air vessels, as well as automobiles. It enables the assessment of external and internal forces affecting the dynamic characteristics of

machines, which is crucial for ensuring their stability and controllability.

In large-scale modeling, the dynamic equations for the prototype machine and its scaled model are formulated. By comparing these equations, the scaling factors of the physical quantities involved are determined. A critical aspect of this process is ensuring consistency between the physical parameters of the prototype and the scaled model, which allows for accurate simulation results. However, acceleration is the only physical quantity whose

scaling factor remains equal to one, regardless of the scaling applied. This is because both the prototype and its model operate within Earth's gravitational field under the influence of the constant free-fall acceleration  $g=9,81 \text{ m/s}^2$ .

In this context, the method of partial accelerations proves to be highly effective. It replaces conventional dynamic equations, which are sums in a mixed vector space, with partial acceleration equations within a homogeneous vector space of accelerations. This substitution simplifies the mathematical model and facilitates the selection of scaling factors for physical quantities. Additionally, this method significantly reduces the computational effort required, thereby increasing the efficiency of modeling. The method of partial accelerations is also a versatile tool that can be adapted for various types of mechanical systems, including vehicles, aircraft, and planetary rovers.

Evaluating the scaling factors of physical quantities using this approach helps to avoid inaccuracies that may arise during multifactorial computations. Furthermore, this method enables the analysis of dynamic system behavior under non-standard conditions, significantly expanding the capabilities of large-scale modeling.

### Analysis of publications

The issue of large-scale modeling of mobile machines has been extensively explored in studies [1–7]. The research process in large-scale modeling involves formulating the dynamic equations of the prototype machine and its scaled model, followed by determining the similarity scales for each physical quantity involved in these equations. A major challenge lies in accurately determining the scaling factors for various physical quantities, such as force, mass, moment of inertia, and velocity, as all these parameters depend on the initial linear scale factor  $m_L$ .

Study [7] established the relationship between similarity scales of different physical quantities based on the initial (calculated) linear scale  $m_L$ . It was determined that, regardless of  $m_L$ , the acceleration scale  $m_a$  always equals one. This phenomenon is explained by the fact that large-scale modeling is conducted within Earth's gravitational field, where the acceleration due to gravity  $g=9,81 \text{ m/s}^2$  remains constant. This property significantly simplifies calculations and ensures the invariance of the machine's dynamic characteristics under scaling conditions.

In planetary rover design, the scale factor  $m_L$  often serves as a primary parameter that defines not only the geometric dimensions but also allows the development of an entire system of scales, including quantities such as force ( $m_F = m_L^2$ ) and mass ( $m_m = m_L^3$ ) [3]. A distinctive feature of the partial accelerations method is that it avoids the need for equations of inertial forces, replacing them with simplified equations of partial accelerations.

With the acceleration scale  $m_a = 1$ , it becomes possible to replace the dynamic equations of the machine with a single equation of partial accelerations, applicable for describing the kinematics of both the prototype machine and its scaled model [8]. This approach enables the integration of dynamic analysis results across different levels of scaling while maintaining the accuracy and reliability of the modeling process. Furthermore, the method facilitates the assessment of the effects of various active and reactive forces on the dynamic stability and controllability of the mobile machine.

Additionally, considering the specifics of applying large-scale modeling methods to the analysis of multi-component motions, it is possible to describe not only standard equilibrium states of the machine but also non-standard modes, such as maneuvering or motion on rough terrain. This opens new opportunities for employing large-scale modeling in optimizing the designs of modern mobile machines.

The method of partial accelerations [8] involves replacing the dynamic equation of a point with mass  $m$

$$m\bar{a} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i \quad (1)$$

into the equation of partial accelerations by dividing both the left-hand and right-hand sides of equation (1) by the mass  $m$

$$\bar{a} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \bar{P}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{P}_i}{m} = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i, \quad (2)$$

where  $\bar{a}$  – acceleration of a point with mass  $m$ ;  
 $\bar{P}_i$  –  $i$ -th force acting on the point with mass  $m$ ;  
 $n$  – number of forces (active and reactive) acting

on the point with mass  $m$ ;  $\bar{a}_i$  – partial acceleration caused by the action of force  $\bar{P}_i$  on the point with mass  $m$ .

The transition from the equation of dynamics (1) to the equation of partial accelerations (2) is possible due to the principle of superposition in mechanics. This principle allows the motion of a body to be analyzed not in a mixed vector space (comprising vectors of forces and accelerations) but in a uniform vector space of accelerations. In this context, the use of inertial forces is entirely excluded. Their application by d'Alembert and Euler was merely a mathematical technique devoid of physical meaning.

**Purpose and Tasks**

The objective of the study is to improve the methods of scale modeling by utilizing the method of partial accelerations in the analysis of mobile machine dynamics.

To achieve this objective, the following tasks need to be addressed:

- establish the relationship between partial accelerations, velocities, displacements, and the degrees of mobility of mobile machines;
- assess the feasibility of applying the equation of partial accelerations in the scale modeling of mobile machines.

**The relationship between partial accelerations, velocities, displacements, and the degrees of mobility of mobile machines**

In studies [9, 10, 11], the relationship between maneuverability and the number of degrees of freedom of a vehicle's running gear is demonstrated. It is shown that the number of degrees of freedom of the running gear [9, 11] is determined by the number of independent control inputs that enable changes in the velocity vector of the vehicle.

From the perspective of automatic control theory, all partial accelerations applied to the vehicle can be considered as control inputs (Fig. 1).

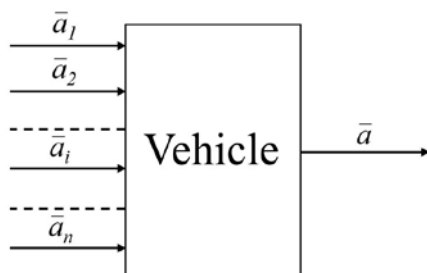


Fig. 1. Partial accelerations as independent control inputs acting on the vehicle

Equation (2) can be expressed through the coordinate unit vectors  $i, j, k$ .

$$a = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k} \tag{3}$$

In equation (3) it is denoted:  $a_x, a_y, a_z$  – projections of the vector  $\bar{a}$  onto the coordinate axes.

$$a_x = \sum_{i=1}^n a_{ix} \tag{4}$$

$$a_y = \sum_{i=1}^n a_{iy} \tag{5}$$

$$a_z = \sum_{i=1}^n a_{iz} \tag{6}$$

where  $a_{ix}; a_{iy}; a_{iz}$  – projections of the  $i$ -th partial acceleration onto the coordinate axes.

After integration and double integration of expressions (4)–(6), partial velocities and partial displacements are obtained.

$$\bar{V}_i = \int_0^t \sum_{i=1}^n \bar{a}_i dt = \sum_{i=1}^n \bar{V}_i \tag{7}$$

$$\bar{S}_i = \int_0^t \sum_{i=1}^n \bar{V}_i dt = \sum_{i=1}^n \bar{S}_i \tag{8}$$

In study [12], the required number of accelerometers and their placement during dynamic testing of mobile machines were determined. This was achieved by establishing the relationship between the degrees of freedom of a vehicle and the necessary number of measurement axes. To evaluate the level of observation of the test object and the accuracy of measurements, the authors of [12] proposed an observation coefficient, defined as the ratio of non-duplicated accelerometer axes to the degrees of mobility of the object. Additionally, a duplication coefficient was introduced to assess the potential for improving measurement accuracy. These coefficients are crucial when designing measurement systems for dynamic testing, as they allow for optimizing the number and placement of sensors while maintaining high accuracy of the results.

In study [13], the use of the multi-component complex motion model [14] enabled the

evaluation of vehicle energy efficiency under steady and unsteady motion conditions. Any motion within this framework is considered as the sum of translational and multiple relative motions. In [13], translational motion was analyzed as rectilinear uniform motion, while deviations from it were treated as relative motions caused by perturbing forces (partial accelerations, partial velocities, and displacements). This approach not only facilitates the analysis of energy efficiency variations but also identifies specific zones where perturbing forces impact the stability of the vehicle's motion.

Thus, partial accelerations caused by various active and reactive forces lead to deviations of the mobile machine from translational (rectilinear uniform) motion. In other words, this disrupts the dynamic equilibrium of the system. Moreover, analyzing these deviations helps to identify the motion components that have the greatest impact on the vehicle's stability, which is especially important when designing high-precision transportation systems.

Each possible relative motion corresponds to one degree of freedom of the vehicle. The number of possible relative motions (partial accelerations, velocities, and displacements) determines the degrees of mobility of the mobile machine. This information is critically important for developing vehicle control models that account for both external and internal influences. Furthermore, applying the multi-component complex motion model allows for more precise calculations of energy consumption in various operational modes, such as maneuvering, braking, or traveling on uneven terrain.

Additionally, the use of observation and duplication coefficients minimizes the number of accelerometers required while preserving data accuracy, which also reduces the cost of dynamic testing. Thus, integrating these approaches into the modeling and testing processes of mobile machines enables higher levels of precision, stability, and energy efficiency.

### Assessment of the feasibility of using the partial acceleration equation in scale modeling

In scale modeling using the method of partial accelerations, the same partial acceleration equation (2) applies to both the full-scale

machine and its scaled model. With equation (2), it becomes straightforward to formulate the equations of motion for the full-scale machine and its scaled model.

$$m_N \bar{a} = m_N \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n m_N a_i = \sum_{i=1}^n P_{iN} \quad (9)$$

$$m_S \bar{a} = m_S \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n m_S a_i = \sum_{i=1}^n P_{iS} \quad (10)$$

where  $m_N$ ;  $m_S$  – masses of the full-scale machine and its scaled model, respectively,  $\sum_{i=1}^n P_{iN}$ ;  $\sum_{i=1}^n P_{iM}$  – sum of forces acting on the full-scale machine and its scaled model.

The scale of forces can be determined by dividing the left-hand and right-hand sides of equations (9) and (10) by each other

$$m_p = \frac{\sum_{i=1}^n P_{iN}}{\sum_{i=1}^n P_{iM}} = \frac{m_N}{m_M} = m_m \quad (11)$$

From expression (11), it can be seen that  $m_p = m_m$ , which corresponds to the results obtained in [7].

The linear similarity scale  $m_l$  is related to the mass scale as follows [7]:

$$m_l = \sqrt[3]{m_m} \quad (12)$$

By determining the linear scale, it is possible to subsequently define the scaling factors for any physical quantities using the methodology presented in [7].

Thus, the application of the partial accelerations method simplifies the determination of scaling factors during modeling.

### Conclusion

Large-scale modeling is a key tool in modern engineering design, facilitating the acceleration of development, verification of fundamental principles, and enhancement of

mechanical system safety at early stages of design. Particular attention is given to methods that simplify modeling, making it precise, efficient, and practical for real-world applications. One such approach is the method of partial accelerations, which holds significant potential for simplifying mathematical models of mechanical system dynamics and determining the scaling of physical quantities. Based on an analysis of theoretical studies and proposed approaches, the following conclusions have been drawn:

In large-scale modeling of mechanical systems, particularly mobile machines (e.g., automobiles), under Earth's gravitational conditions, the acceleration scale is always equal to unity. This implies that both the prototype and its scaled model operate under identical gravitational acceleration conditions,  $g = 9,81, \text{ m/s}^2$ .

This property establishes the method of partial accelerations as a foundation for determining the scaling factors of all physical quantities involved in the dynamic equations. This approach not only simplifies the modeling process but also ensures high accuracy by minimizing the influence of errors associated with multifactorial computations.

The use of a multi-component motion model introduces new opportunities for analyzing the dynamics of mobile machine systems. This approach represents motion as the sum of translational and relative components, simplifying the description and modeling of complex dynamic processes. On this basis, equations of relative motion can be formulated, which serve as the foundation for constructing partial acceleration equations.

The application of such equations enables a more precise representation of the effects of external and internal forces on the system, thereby optimizing the design and testing of mobile machines.

### Conflict of interests

The authors declare that there is no conflict of interests regarding the publication of this paper.

### References

1. Подригало, М. А., Ужва, А. В., & Шеїн, В. С. (2024). Вимірювання параметрів автомобілів і двигунів з використанням масштабного моделювання. *Новітні технології для захисту повітряного простору*: матеріали XX Міжнар. наук. конф. ХНУПС ім. Івана Кожедуба (м. Харків, 02-03 травня 2024 р.) (с. 488). Харків.
2. Шеїн, В. С., & Подригало, М. А. (2024). Використання масштабного моделювання для встановлення вимог до точності вимірювань при випробуваннях автотракторних двигунів. *Сучасні енергетичні установки на транспорті і технології та обладнання для їх обслуговування*: матеріали 15-ої Міжнарод. наук.-практ. конф. (м. Херсон, 13-15 березня 2024 р.) (№15, с. 279–281). Херсон.
3. Шеїн, В. С., & Подригало, М. А. (2023). Використання масштабного моделювання при проектуванні планетоходів. *XXIX Scientific and Technical Conference with International Participation «Transport, Ekology – Sustainable Development»*: збірник доклади (м. Варна (Болгарія), 18-20 травня 2023 р.) (№30, с. 122–126). Варна.
4. Шеїн, В. С., Подригало, М. А., & Рябушко, І. А. (2023). Проектування планетоходів з урахуванням масштабів подоби. *Сучасні енергетичні установки на транспорті, технології та обладнання для їх обслуговування*: матеріали 14-ї Міжнарод. наук.-практ. конф. (м. Херсон, 16-18 березня 2023 р.) (с. 306–308). Херсон.
5. Подригало, М. А., Нікорчук, А. І., & Шишкін, О. Ю. (2023). Побудова типорозмірного ряду малогабаритних транспортних засобів подвійного призначення. *Сучасні технології та перспективи розвитку автомобільного транспорту*: матеріали XVI-ї Міжнар. наук.-практ. конф. (м. Вінниця, 23-25 жовтня 2023 р.) (с. 276–279). Вінниця.
6. Подригало, М. А., Полянський, О. С., Краснокутський, В. М., & Шеїн, В. С. (2023). Побудова модельних рядів автомобілів і тракторів за допомогою ентропії. *Сучасні технології та перспективи розвитку автомобільного транспорту*: матеріали XVI-ї Міжнар. наук.-практ. конф. (м. Вінниця, 23-25 жовтня 2023 р.) (с. 280–282). Вінниця.
7. Шеїн, В. С., & Подригало, М. А. (2023). Масштабне моделювання при проведенні експериментальних досліджень автомобіля. *Сучасні технології в машинобудуванні та транспорті*. Науковий журнал (№1(20), с. 187–197). Луцьк: ЛНТУ. <https://doi.org/10.36910/automash.v1i20.1048>
8. Подригало, М. А., Артёмов, М. П., & Кайдалов, Р. О. (2016). Застосування методу парціальних прискорень для оцінювання тягово-швидкісних властивостей автомобілів та бойових машин. *Збірник наукових праць Національної академії Національної гвардії України*, 2 (28), 16–21.
9. Подригало, М., Гармаш, В., & Побережний, А. (2022). Поліпшення маневреності чотиривісних автомобілів збільшенням числа ступенів рухливості ходової частини. *Збірник наукових*

праць Національної академії Національної гвардії України, 1 (39), 38–41. <https://doi.org/10.33405/2409-7470/2022/1/39/263364>

10. Артёмов, М. П. (2014). *Динамічна стабільність мобільних сільськогосподарських агрегатів*, (автореферат дисертації д-ра техн. наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка).
11. Клец, Д. М. (2015). *Концепція забезпечення стабільності показників стійкості та керованості автомобілів*, (автореферат дисертації д-ра техн. наук, Харківський національний автомобільно-дорожній університет).
12. Артёмов, М. П., Подригало, М. А., Клец, Д. М., & Коробко, А. І. (2012). Визначення необхідної кількості акселерометрів і місця їх установки при динамічних випробуваннях мобільних машин. *Вісник НТУ «ХПИ»: Механіка та машинобудування*, (2), 127–135.
13. Подригало, М. А., & Полянський, О. С. (Ред.). (2024). *Динаміка машин з пружними ланками. На прикладі автомобілів і тракторів* (монографія, Харків). ISBN 978-617-95214-7-8.
14. Lebedev, A., Artiymov, N., Shulyak, M., Podrigalo, M., Abramov, D., Klets, D., & Kaidalov, R. (2015). Operating of mobile machine units system using the model of multicomponent complex movement. *Automobile transport*, (36), 60–66.

**Bogomolov Viktor**<sup>1</sup>, DSci (Engineering), Prof., Department of Automobiles named after A.B. Gredeskul, e-mail: [bogomolov.viktor@gmail.com](mailto:bogomolov.viktor@gmail.com), Phone.: +38 (050) 902-76-00, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6871-8244>

**Podryhalo Mykhailo**<sup>1</sup>, DSci (Engineering), Professor Department of Machine-Building Technology and Machine Repair, e-mail: [pmikhab@gmail.com](mailto:pmikhab@gmail.com), Phone: +38 (050) 301-16-58, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1624-5219>

**Shein Vitalii**<sup>1</sup>, PhD (Engineering), Assoc. Prof. Department of Machine-Building Technology and Machine Repair, e-mail: [sheinvitalis@gmail.com](mailto:sheinvitalis@gmail.com), Phone: +38 (095) 187-12-23, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9282-0190>

**Baitsur Maksym**<sup>1</sup>, PhD (Engineering), Assoc. Prof. Department of Machine-Building Technology and Machine Repair, E-mail: [maksim3103@gmail.com](mailto:maksim3103@gmail.com), Phone: +38 (050) 824-05-09, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4935-3707>

<sup>1</sup>Kharkiv National Automobile and Highway University Yaroslava Mudrogo str., 25, Kharkiv, Ukraine, 61002

## Застосування методу парціальних прискорень при масштабному моделюванні механічних систем

**Анотація. Проблема.** Сучасні тенденції у проектуванні механічних систем вимагають застосування ефективних методів, які дозволяють зменшити витрати часу та ресурсів на розробку і тестування нових конструкцій. Масштабне моделювання є інструментом, що забезпечує перевірку теоретичних положень, оцінку безпеки та функціональності механічних систем на ранніх етапах їх проектування. Однак, складність динамічних моделей, які описують поведінку мобільних машин у масштабованому вигляді, зумовлює необхідність впровадження методів, що дозволяють спростити ці моделі. Одним із перспективних підходів є метод парціальних прискорень, який забезпечує математичну та обчислювальну оптимізацію моделювання. **Мета.** Метою дослідження є вдосконалення методів масштабного моделювання шляхом використання методу парціальних прискорень під час досліджень динаміки мобільних машин. **Методологія.** Дослідження базується на принципі суперпозиції в механіці, який дозволяє замінити класичні рівняння динаміки рівняннями парціальних прискорень в однорідному векторному просторі. **Результати.** Встановлено, що масштаб прискорень для механічних систем у полі тяжіння Землі завжди дорівнює одиниці, що спрощує процес визначення масштабів фізичних величин. Запропоновано рівняння парціальних прискорень, які забезпечують точне відображення кінематики мобільних машин як для натурної, так і масштабної моделі. Продемонстровано, що застосування моделі багатокomпонентного складного руху дозволяє оцінити динамічні відхилення мобільних машин та врахувати вплив активних і реактивних сил. **Оригінальність.** Запропонований метод парціальних прискорень є новим підходом до масштабного моделювання механічних систем. Він дозволяє працювати в однорідному просторі прискорень, що виключає необхідність використання сил інерції. Це зменшує складність математичних моделей і підвищує точність прогнозування динамічної поведінки систем. **Практичне значення.** Метод парціальних прискорень може бути використаний для проектування мобільних машин (автомобілів, планетоходів); оптимізації динамічних випробувань із використанням акселерометрів; моделювання енергоефективності транспортних засобів при сталому та несталому русі; вдосконалення масштабних моделей для аналізу безпеки та маневреності.

*Ключові слова:* масштабне моделювання механічних систем, метод парціальних прискорень, мобільні машини, принцип суперпозиції в механіці, динамічні випробування, багатокomпонентний складний рух, масштаб фізичних величин, енергоефективність транспортних засобів

**Богомолів Віктор Олександрович**<sup>1</sup>, д.т.н., професор кафедри автомобілів ім. А. Б. Гредескула, е-mail: [bogomolov.viktor@gmail.com](mailto:bogomolov.viktor@gmail.com), тел.: +38 (050) 902-76-00, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6871-8244>

**Подригало Михайло Абович**<sup>1</sup>, д.т.н., професор, завідувач кафедри технології машинобудування та ремонту машин, е-mail: [pmikhab@gmail.com](mailto:pmikhab@gmail.com), тел.: +38 (050) 301-16-58,

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1624-5219>

**Шейн Віталій Сергійович**<sup>1</sup>, к.т.н., доцент кафедри технології машинобудування та ремонту машин; е-mail: [sheinitalis@gmail.com](mailto:sheinitalis@gmail.com), тел.: +38 (095) 187-12-23,

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9282-0190>

**Байцур Максим Вячеславович**<sup>1</sup>, к.т.н., доцент кафедри технології машинобудування та ремонту машин, е-mail: [maksim3103@gmail.com](mailto:maksim3103@gmail.com), тел.: +38 (050) 824-05-09,

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4935-3707>

<sup>1</sup>Харківський національний автомобільно-дорожній університет, вул. Ярослава Мудрого, 25, м. Харків, Україна, 61002.